測量平差概論

前言

高職土木建築科測量學及實習九八課綱，包含誤差理論與平差單元。目前已有之教科書對於該單元之說明，或者偏重於艱深之理論，或者偏於一隅未能全面說明，不易為學生接受，甚而導致誤解。本文省略理論推導，僅從簡易實例著手，廣泛說明誤差傳播及平差概念，重點放在觀念說明與簡易平差，希望能夠對技職院校之測量學與實習之教學有所助益。對於作者疏漏之處，期望同行賢達給予指教。

致謝

本文承蒙矩陣出版公司打字排版，成大測量及空間資訊系同仁轉檔編輯，謹致十二萬分之謝意。

民國 98 年 9 月 23 日　　退休講師　白巨川　敬啟

測量實習２　測量平差概論

一、實習項目：

1. 求英制與公制長度之換算係數
2. 誤差之意義
3. 誤差傳播概論
4. 測量平差概論

二、儀器工具：

一般文具行販賣之透明塑膠尺，長度 30 公分，刻註公分與英寸，每組同式 2 支。四開圖畫紙一張，膠帶。

三、地點：

教室

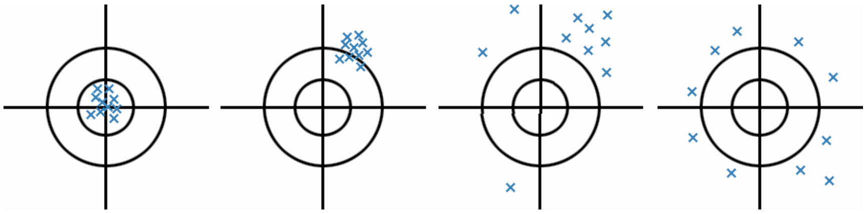
四、觀念：

一般的測量學教科書，通常一開始就講授測量平差法，其實大部份學生都不知道何謂測量？也還沒有親自測量，馬上就學一大堆測量平差的名詞與理論，學

生，尤其高職一年級學生，更是難以理解，本文擬從數個簡單例子或實驗著手，引導學生入門。

1. 打靶的例子

所謂百步穿楊與百發百中，似乎都是演義小說中的故事，實際情況是，神槍手以校正好的槍枝射擊，子彈多會密集於靶紙中央，且分佈之範圍甚小，如圖2-1(*a*)。若槍枝的瞄準器偏了，則所有的子彈均會統一偏移，如（*b*）圖。



	(*a*)	(*b*)	(*c*)	(*d*)
正確度	高	低	低	低
精密度	高	高	低	低

［圖（*a*）、（*b*）各有 10 個彈著 點，數目與圖（*c*）、（*d*）相同。其實神槍手打靶時，某些彈孔幾乎完全重疊而難以辨別，且假設打靶過程中看不見彈著點。］

圖 2-1　打靶的正確度與精密度

生手打靶，則彈著點就不會那麼集中於靶心，離散程度甚大，亦即分佈範圍較之於神槍手的為大，如（*c*）及（*d*）圖。

將打靶的例子引用於測量，觀測值如果靠近真值，叫做正確度高，（*a*）圖。如果只是彼此靠攏，則叫做精密度高，（*b*）圖。測量之要求為在正確度高之前提下，精密度亦高。如果像（*d*）圖所示，所有彈著點分佈甚廣（精密度低），雖然他們的平均坐標接近原點（靶心），仍不能稱做正確度高。

2. 威特 T2 讀數試驗

威特 T2 光學測微器經緯儀，度盤刻劃到 20’，利用一系列之透鏡與稜鏡，將度盤直徑兩端之刻劃線合在一處讀數，一次讀數就相當於 *A*、**B** 游標取平均，20’÷2 ＝10’，所以它的光學測微器讀數範圍僅需 10’，最小刻劃間隔為 1”，由於間隔還算大，有些測量教科書建議估讀到 0.1”。其實估讀到 0.1”沒有實用價值，茲以試驗說明之。

首先將 T2 置妥，望遠鏡大約水平，固定水平及垂直制動螺旋，假設已用它瞄準一個目標，欲讀取水平度盤數值。調整好水平度盤反光鏡，旋轉讀數目鏡環，使刻劃線及數字清晰。順鐘向旋轉測微鼓，使刻畫線對齊，只讀秒數，且估讀至0.1”，逆鐘向旋轉測微鼓，使刻畫線錯開，再順鐘向旋轉測微鼓，使刻畫線對齊，讀數。

依照此種方式讀數共 120 次，每做 20 次休息數分鐘。此種作業方式在於儘

量排除某些不必要的誤差，試驗數據如表 2-1。(先讀到 0.1”，最後計算說明讀到 1”比較合理)。

表 2-1　威特 T2 讀數試驗

A	範圍	上	14.4	15.4	16.4	17.4	18.4	19.4	20.4	21.4	22.4	23.4	↗
		下	↙	14.5	15.5	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
B	觀測值 ℓ		≦14”	15”	16”	17”	18”	19”	20”	21”	22”	23”	≧24”
C	次數 m		0	0	1	8	29	44	22	13	2	1	0
D	誤差Δ		≦-5”	-4”	-3”	-2”	-1”	0”	+1”	+2”	+3”	+4”	≧+5”
說明	觀測值總和〔ℓ〕= 1· 16”+8· 17”+29· 18”+44· 19”+22·20” +13· 21” +2· 22”+1· 23” = 2290” 全部次數　n =〔m〕= 1+8+29+44+22+13+2+1 = 120 平均值　x =〔ℓ〕÷ n = 19.1”= 19” 誤差　Δ=觀測值 ℓ－ 平均值 x = B 欄各值 - 19”												
	※因為讀數值分佈在 16”~23”，間隔 7”，所以平均值取 19”，不取 19.1”。												

表 2-2　威特 T2 符合法讀數誤差分佈表

代表值 ℓ	≦14”	15”	16”	17”	18”	19”	20”	21”	22”	23”	≧24”
誤差Δ	≦-5”	- 4”	- 3”	- 2”	- 1”	0”	+1”	+2”	+3”	+4”	≧+5”
次數 m	0	0	1	8	29	44	22	13	2	1	0
頻率 p	0	0	0.01	0.07	0.24	0.37	0.18	0. 11	0.02	0.01	0
頻率密度 d（秒$^{-1}$）	0	0	0.01	0.07	0.24	0.37	0.18	0. 11	0.02	0.01	0
說明	頻率=各組次數 ÷ 全部次數，(頻率總和 = 1.01 ≈ 1) 頻率密度= 頻率 ÷ 組距，本例取組距為 1”。 $〔\Delta^2〕= 1\cdot(-3)^2+8\cdot(-2)^2+29\cdot(-1)^2+44\cdot 0^2+22\cdot 1^2+13\cdot 2^2 +2\cdot 3^2+1\cdot 4^2=178$ 秒^2 $\sigma=\{〔\Delta^2〕\div(n-1)\}^{1/2}=\{178\div(120-1)\}^{1/2}=\pm 1.2”$ $\sigma=\pm 1.2”$即為（任何）一次讀數之中誤差										

備 註	1. 表中 120 個讀數，Δ值從 －3” ～ ＋4”，跨距 7”，Δ值所對應之 ℓ 為 16”～23”，在相同情況下，精度相等，所以每一個觀測值（讀數）ℓ 之中誤差相等。 2. 在實際測量作業中，每一次瞄準目標通常只讀數 1 次（最多二次），中誤差± 1.2”，所以讀到 0.1”不合理。

使用 T2 讀數資料作直方圖，而作直方圖之基本要求為觀測值的總數要多，組距大小恰當，依組距分組之組數大約 10 個，最少 6 個，最多不要超過 15 個（6，10，15，為大約之數，請不要追究太多，若有興趣，請參考統計學）。本試驗取組距 1”，共有 8 組，依據表 2-2 取頻率密度 d 與誤差Δ作頻率密度直方圖，如圖 2-2。將各個直方柱頂點中央連線，即為頻率密度折線圖。

當觀測量總數加倍，組距由 1” 減半為 0.5”，再作頻率密度折線圖…則其圖形將會趨近於圖中以虛線描繪之曲線圖。而其極限之圖形就會趨近標準正態分佈密度函數之圖形，如圖 2-3。

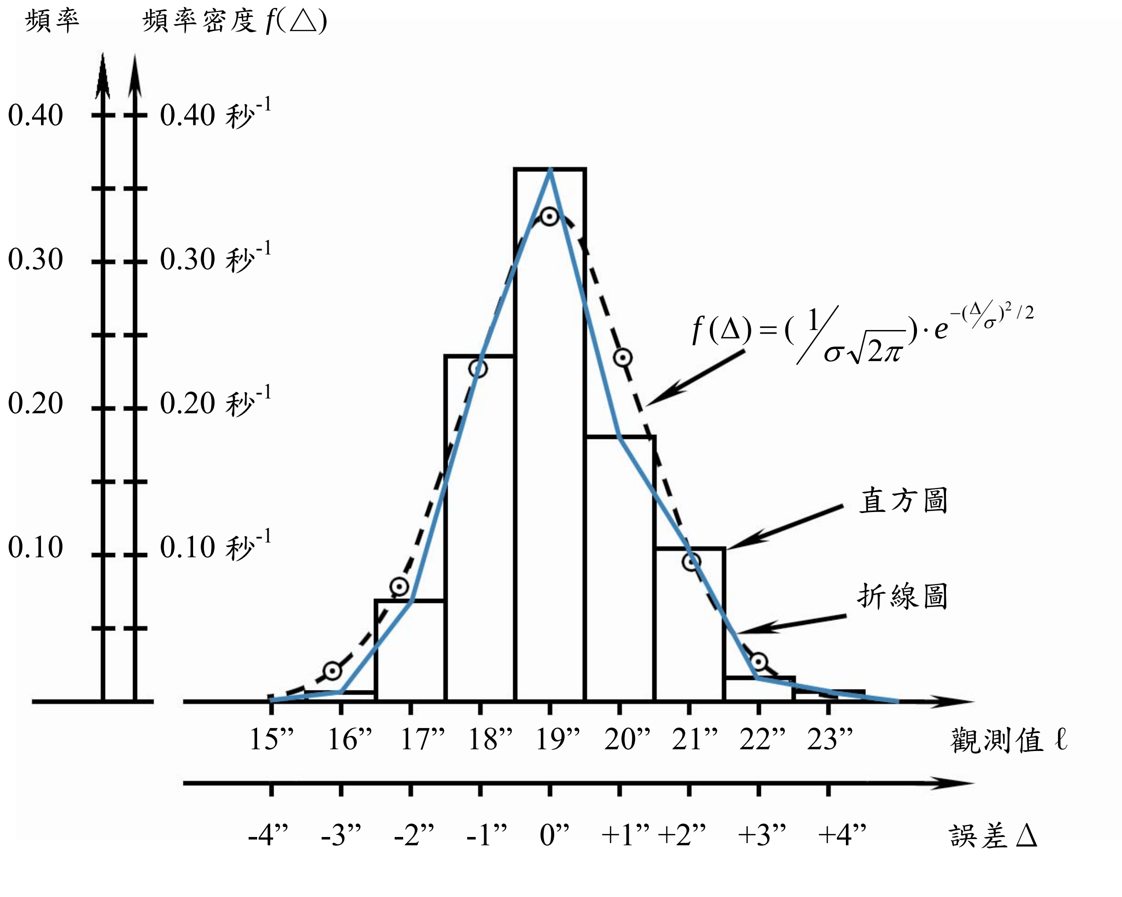


圖 2-2　頻率密度直方圖、折線圖與曲線圖

標準正態分佈密度函數之曲線如圖 2-3，在該函數

$f(\Delta)=(1/\sqrt{(2\pi)})e^{-\Delta^2/2}$ 曲線下之面積為機率。

（1）誤差 $\Delta=a\sim b$ 之機率為圖中深色之區域。

（2）誤差 $\Delta=-\sigma\sim+\sigma$（一倍中誤差 σ）之機率為 68.3%。

（3）誤差 $\Delta=-2\sigma\sim+2\sigma$ 之機率為 95.4%。

（4）誤差 $\Delta=-\infty\sim+\infty$ 之機率為 1。

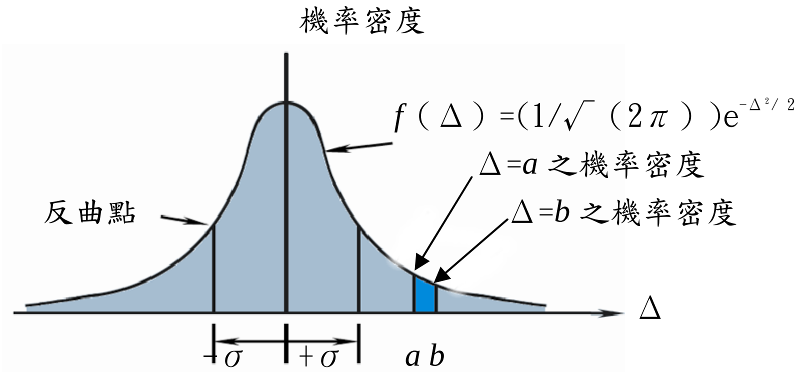


圖 2-3　標準正態分佈密度函數

五、方法

（一）準備

1. 將桌面整理乾淨，再將四開圖畫紙平鋪於桌面。
2. 將一支透明塑膠尺翻面，並使英制刻劃的一側朝向自己（朝後），公制刻劃朝前。
3. 用膠帶將該尺粘妥於圖畫紙中央，勿使鬆動。膠帶宜貼在不礙事之處，勿貼在刻劃線上。
4. 將第二支尺公制刻劃的一側朝前，且將該尺與第一支尺並排緊靠，使公分刻註的 0 與英寸刻註的 0 對齊。
5. 再用膠帶將第二支尺貼牢。

（二）讀數

本次實驗係以英寸刻劃線為準，讀取對應之毫米（mm）數值，有兩種方式，甲式為尋找儘可能對齊之整數毫米，乙式為估讀到 0.1mm，本次採取甲式，為了排除錯誤，宜在全尺多處觀察且讀數，一共測取 11 個數值，如表 2-3。

表 2-3 英制尺換算公制尺之係數試驗

i	A		觀　測　值			改正數	v²
			讀取值	導　出　值		$v = x - \ell$	
			B	$\ell = B \div A$	$C = \ell - x_0$	mm/inch	(mm/inch)²
	吋	inch	mm	mm/inch	mm/inch		
1	1 ½	1.5	38	25.33	0.03	0.01	0.0001
2	3	3.0	76	25.33	0.03	0.01	0.0001
3	3 ⅝	3.625	92	25.38	0.08	-0.04	0.0016
4	4 ½	4.5	114	25.33	0.03	0.01	0.0001
5 ×	$5\frac{1}{4}$ ×	5.25 ×	132 ×	25.14 ×	/	/	/
6	$5\frac{7}{8}$	5.875	149	25.36	0.06	-0.02	0.0004
7	$6\frac{5}{16}$	6.3125	160	25.35	0.05	-0.01	0.0001
8	7 ½	7.5	190	25.33	0.03	0.01	0.0001
9	9	9.0	228	25.33	0.03	0.01	0.0001
10	9 ¾	9.75	247	25.33	0.03	0.01	0.0001
11	$10\frac{15}{16}$	10.9375	277	25.33	0.03	0.01	0.0001
令 x_0 = 25.3 mm/inch $x = x_0 + \Delta x$ =25.3+0.04 =25.34 mm/inch					[0.40] Δx= 0. 40 / 10 =0.04	[0]	[0.0028]
$\sigma = (0.0028/(10-1))^{1/2} = \pm 0.018$ mm/inch　≈ ± 0.02 mm/inch							

（三）計算

假設使用的二支尺完全相同，英制尺與公制尺刻劃均勻，以英制尺子之刻線為依據，即為表 2-1 中之 A 欄，找出公制尺之整數毫米(mm)數值，表中 B 欄數值為讀取值，再依 B÷A = ℓ 得導出值，例如第 3 個值 25.38，以下之計算取導出值 ℓ 做為觀測值。

觀察表中 11 個 ℓ 值，其中第 5 個為 25.14，相對於其他 10 個明顯偏小， 可能在實驗之中發生錯誤。重新觀察二支並列之尺子，發現讀錯，應為 133 mm。在實際測量工作中，通常無法或不易還原現場重測更正，所以只要查出了錯誤，就將它刪除，只剩 10 個觀測量。

為了減化計算工作，可令 $x_0=25.3$ 為轉換係數之近似值。再令 $C=\ell-x_0$，將 10 個 C 值相加得 0.40，被 10 除得 $\Delta x=0.04$，求得換算係數 x，

$$x=x_0+\Delta x = 25.3 + 0.04 = 25.34 \text{ mm/inch}$$。

比較其他各組求得之值，應該各有差異。已知其精密值為 25.40 mm/inch，本次實驗所得之值較小。因為文具行所販賣之尺子僅供一般文書之用，不需非常精密。所以，即使測取非常多次的 B 值，推算 ℓ 值，進而求換算係數 x，也無法求得精密值 25.40 mm/inch。如果到精密機械工具商店購買比較精密的公制尺與英制尺，並利用放大鏡，採用估讀到 0.1 mm 之方法測取 B 值…，最後求得之 x 值才有可能接近 25.40 mm/inch。

六、注意事項

1. 有些尺子的刻劃間隔不夠均勻一致，如果可以很明顯感覺出來，則不要使用這種尺子。
2. 觀察刻劃線有無對齊（方式甲）或者估讀到 0.1 mm（方式乙），眼睛要在刻劃線之正上方，不可偏斜，因為偏斜觀看時會發生「視差」，導致觀察的誤差。

七、討論

1. 參閱表 2-1，假若另外一位測量員乙試驗之數據如下：讀數代表值 ℓ 為 15”、16”、…、23”，次數各為 1、2、10、31、41、23、9、2、1，試求平均值 x 及一次觀測之中誤差 σ。（答：x = 18.9” = 19”，σ = ±1.3”）
2. 承第 1 題，比較第 1 位與第 2 位測量員的讀數中誤差 σ，何者較大？何者技術比較差？（答：乙的較大，乙的技術稍差，但是不明顯。）

八、附錄—測量平差概論

測量平差法是測量學體系中之專業科目，詳細內容及理論推導請參閱測量平差法及統計學。本文僅摘錄一些必要之原理及公式，配合有關的例題說明，希望學生能夠學得一點平差的基本能力。以下共分三大節，誤差、誤差傳播概論及測量平差概論，依序說明之。

（一）誤差

所謂測量，就是測量人員採用適合的儀器工具，依據適當的方法，在有關係的環境或場合，測量長度、角度、距離及速度等謂之測量。所以測量人員、儀器與環境三者，都對測量成果的精度產生影響，也就是誤差會伴隨著測量而來。

1. 誤差的來源

測量發生了誤差甚至錯誤，測量人員都會責怪儀器、環境與別人，其實自己的責任更大。

a. 人為誤差

前面已提過使用 T2 讀數，重複讀數多次各有不同，分佈在 16”～ 23”，此為讀數所發生的誤差。用英制與公制尺，求換算係數，將 133 讀成 132，此為錯誤。不論讀數的誤差或錯誤，主要來自測量人員的誤差。

b. 儀器誤差

在求取英制與公制尺子的換算係數的例子，得到 25.34 mm/inch，此數值與標準值 25.40 mm/inch 相差 0.06 mm/inch，此為儀器誤差所導致。打靶的例子，如果瞄準器沒有校正，即使神槍手也會打偏，這就是儀器誤差所導致的後果。

c. 環境所導致的誤差

氣溫升降會導致鋼卷尺本身漲縮，使得量距所得之讀數值隨之縮小增大。夏天中午柏油路面上方的空氣，由於受熱而發生大氣躍動的現象，愈靠近路面躍動愈大，所以水準測量規定水準尺讀數不得小於 0.300 m，以減少環境的影響。

※計算誤差

採用近似方式或近似平差法亦會導致誤差，只要在容許範圍內則無礙。

2. 誤差的種類

前面介紹了誤差的來源，要怎麼處理（或應付）才能使最後測量成果正確精密？應該針對誤差的性質，也就是誤差的種類，分別處理。誤差分為三類：

a. 錯誤

錯誤幾乎全由測量人員疏忽而發生，例如將 133 mm 看成 132 mm，或者心裏想著抄寫 0.457，卻寫成 0.475，…等。

欲防止或查出錯誤，可以採用重複觀測，至少觀測兩次，如果兩次觀測值之差異在規範以內，可以初步認定沒有錯誤。也可採用多餘觀測，例如三角形內角和為 180°，只要測了任意二角，第三個角就可依公式求得，可是只要有一個角測錯，第三角也可能跟著錯誤。反之，如果三個內角都測，三個內角之和與 180°之差異在規範以內，也可初步認定沒有錯誤。總之，在測量作業中要儘量排除錯誤。

b. 系統誤差

系統誤差對測量成果的影響甚大，測量人員、儀器與環境都可能導致系統誤差。

以鋼卷尺量距為例，每一支鋼卷尺出廠時都要附一份檢定表，註明在標準拉力與氣溫時，刻劃每 5 公尺處之對應實長，其間之誤差即為鋼卷尺本身之系統誤差。在野外測量時之氣溫與拉力通常不是標準值，導致鋼卷尺之長度改變，此種改變係由環境所產生。以卷尺量距讀數時，測量人員習慣性的偏大（或小），此為測量人員的系統誤差。

有些類型的儀器誤差，可以採用校正儀器的方式以消除之，例如水準儀視準軸誤差可以採用定樁法校正。校正不完善的殘餘誤差，則可以採用適當的觀測方法，在測量過程中直接使之互相抵消。例如水準測量使前後視等距，可以

抵消水準儀的視準軸誤差。

又如地球曲率誤差，對水準測量也會產生影響，若使前後視等距，使它成為對稱型態的誤差，就可互相抵消。

電子測距時，如果使用不同廠牌的反射稜鏡或反射貼紙，就有稜鏡常數之問題，它是固定常數型態之系統誤差，可將它輸入電子測距儀內立即改正。

氣溫升降對鋼卷尺量距的影響為比例型態的系統誤差，通常在測量後計算改正。如果在工地放樣，則需立即改正。

至於不規則的系統誤差，處理起來比較複雜…也有的以未知參數型態放在平差程式裏，多少吸收掉一些，降低它對測量成果之影響。

c. 偶然誤差

偶然誤差不可依字面解釋成「偶然發生的誤差」，因為只要測量，就伴隨了誤差，所以「偶然」之本意為「不能確定」，亦即不能確定誤差之大小與正負，但是經由試驗與理論可知偶然誤差之特性。

參考 T2 讀數試驗所繪之誤差頻率密度直方圖及標準正態分佈密度函數之圖形，偶然誤差之特性如下：

（1）絕對值較小的誤差，出現的機率較大。絕對值較大的誤差，出現的機率較小。

（2）絕對值相等的正誤差與負誤差，出現的機率相同。

（3）極大誤差出現的機率為零。

（4）當觀測次數無限增多時，所有偶然誤差的平均值趨於零。

在實際測量工作中，由於時間有限，不可能無限次的測量，那麼要測量幾次?如何防止錯誤?學者專家依據已有的測量經驗及理論，定出實用的測量規範，其中包括：儀器精度之等級、重複測量的次數、容許誤差的數值大小…等。只要依照規範施測，通常可將偶然誤差對測量成果之影響，控制在容許誤差以內。

3. 真值與最或是值

測量員觀測某一水平角 n 次，ℓ_1，ℓ_2，…ℓ_n ，在相同狀況下觀測，所以每個觀測值的精度相當，可取 n 個觀測值的平均值 x，

$$x = [\ell]/n = \left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i\right) \div n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{（1）}$$

其中符號〔　〕與 $\sum_{i=1}^{n}$ 均為計算總和之符號，意義相同。

依偶然誤差之性質，當 n 趨近於無窮大時，所有偶然誤差之和之平均值為零，因此可得真值 T

$$T = \lim_{n\to\infty}[\ell]/n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

式中：T 為水平角之真值。

$\lim\limits_{n\to\infty}$ 為 n 趨近於無窮大取極限。

由於現實問題，例如時間有限，不可能測量無窮多次，儀器本身精度…等，因此無法得到真值 T，通常只能依照公式（1）求得平均值 x，該值在測量平差法另有一個名稱，叫做「最或是值」，可認為最或是值接近真值。

4. 真誤差，改正數與誤差

設 T 為真值，x 為最或是值，二者詳細意義可參閱公式（2）與（1）。ℓ_i 為觀測值，ε_i 為真誤差，ν_i 為改正數，Δ_i 為誤差，i =1～ n，茲規定：

真值 = 觀測值−真誤差

最或是值 = 觀測值 + 改正數

即

$$\left.\begin{aligned} T &= \ell_i - \varepsilon_i \\ x &= \ell_i + \nu_i \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

換個寫法，

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_i &= \ell_i - T \\ \nu_i &= x - \ell_i \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3')$$

比照真誤差之定義，規定誤差為：

誤差=觀測值−最或是值

即

$\Delta_i = \ell_i - x$ ……………………………………………………（3”）

有的教科書對於真誤差、改正數與誤差之定義，可能與公式（3’）、（3”）差了+－符號，但是不會妨礙「中誤差」之計算。

5. 中誤差σ

測量值 $\ell_1 \sim \ell_n$，依據測量平差法理論，如果已經知道真值 T，可得真誤差 ε_1 ～ ε_n，中誤差σ為

$\sigma = ([\varepsilon^2]/n)^{1/2}$ ……………………………………………………（4）

如果不知道真值，則先由公式（1）求最或是值 x，再由公式（3）求改正數，v_1 ～ v_n，得

$\sigma = \{[\nu^2]/(n-1)\}^{1/2}$ ……………………………………………（5）

中誤差σ用以表示 ℓ_1 ～ ℓ_n，n 次觀測中任一次觀測之中誤差，亦即代表單次觀測之精度。

比較嚴格的說法，中誤差 σ還要區分「先驗」與「後驗」（請參閱第二節有關「權」之說明）。統計學也區分為樣本與母體標準偏差，於此不再詳述。

※上述*中誤差*一詞，也可稱為*標準誤差*，或*標準偏差*。

※除了*中誤差*，另有*平均誤差*與*或是誤差*，也可以表示單次觀測之精度，請參閱平差法或統計學。

6. 精度與相對精度

測量成果之優劣，可依據誤差之大小來評定，也就是中誤差愈大，測量成果愈差，精度愈低，反之則高。

茲有兩段距離 A、B，以鋼卷尺量距，得到其長度及中誤差各為 $x_A = 100.000$ m，$\sigma_A = \pm 2$ mm，$x_B = 200.000$ m，$\sigma_B = \pm 3$ mm。因為$\sigma_A < \sigma_B$，所以距離 A 之量距誤差較小，精度較高。

此一例子，若再比較$\sigma_A \div x_A$ 與$\sigma_B \div x_B$，可知$\sigma_B \div x_B$較小，相對誤差較小，「精度」較高，所以需要再定義另一個名稱「相對精度」，以免混淆。

相對精度即是中誤差除以最或是值的比值，通常使分子為 1，分母湊整為正整數或 10 的倍數，分母愈大，比值愈小，相對誤差愈小，相對精度愈高。

國家級一等水準網測量，它的測量成果，除了表示各點之高程及其中誤差，還應該加註各點到基準原點之距離。

角度測量只採用精度，不用相對精度，也就是說不論角度之大小，只論角度本身之誤差。

7. 容許誤差 U

在本書測量實習 2，圖 2-3 標準正態分佈密度函數圖，它的配合說明提及，誤差$\Delta = -2\sigma \sim +2\sigma$之機率為 95.4%，也就是說誤差$\Delta$絕對值大於$2\sigma$之機率為 4.6％，相當於 22 次觀測才有一個觀測值的誤差絕對值大於 2σ。因此規定容許誤差 U 為

$$U = 2\sigma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

※有的教科書採用 $U = 3\sigma$，只是此一規定太鬆。誤差$\Delta = -3\sigma \sim +3\sigma$之機率為 99.74％，380 多個觀測值只有 1 個觀測值的誤差絕對值大於 3σ，即使普通測量員也不該發生這麼大的誤差。

8. 較差 d

重複觀測二次的差值取絕對值稱為較差，即：

$$d = |\ell_1 - \ell_2| = \ell_1 - \ell_2 \quad \text{或} \quad \ell_2 - \ell_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

較差用來初步評定測量值是否合格。

9. 閉合差 w

三角形內角和 180°為理論值，它是真值，三個內角之觀測值為α、β、γ，所以三角形閉合差

$$w = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

水準環線一圈之高程差總和為零，它也是真值，水準環一圈各小段之高程

差 $\ell_1 \sim \ell_n$，水準環線閉合差

$$w = (\ell_1 + \ell_2 \cdots\cdots + \ell_n) - 0 = \ell_1 + \ell_2 \cdots\cdots + \ell_n$$

閉合差亦用來初步評定測量是否合格，而平差法就是要處理閉合差不為零的矛盾，使平差後之觀測值滿足閉合條件。

（二 ）誤差傳播概論

所謂誤差傳播，就是誤差傳遞的意思，例如 C 由 A 或者由 A與B導得，則 A 或 A 與 B 之誤差就會傳遞給 C。

1.誤差傳播公式

設 y 為 x_1、x_2、…x_u 之函數，亦即

$$y = f(x_1、x_2、\cdots x_u)$$

將之微分，也就是處理成為誤差 dx_i 的線性函數

$$dy = \partial f/\partial x_1 \cdot dx_1 + \partial f/\partial x_2 \cdot dx_2 + \cdots + \partial f/\partial x_u \cdot dx_u \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

再將誤差以中誤差之形式表示，

$$\sigma y = \{(\partial f/\partial x_1)^2 \sigma x_1{}^2 + (\partial f/\partial x_1)^2 \sigma x_2{}^2 + \cdots + (\partial f/\partial x_u)^2 \sigma x_u{}^2\}^{1/2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

由於高職一年級未學微分，所以下述課文中不用微分符號「d」，改用誤差符號「Δ」。

※本文直接使用誤差傳播公式，理論推導省略不述。

2.較差的中誤差及容許誤差

依公式（7）

$$d = \ell_1 - \ell_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

用符號Δ加在 d、ℓ 之前，表示它們的誤差，Δd、Δℓ，得

$$d + \Delta d = (\ell_1 + \Delta\ell_1) - (\ell_2 + \Delta\ell_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

（*b*）－（*a*）

$$\Delta d = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2 = (+1)\Delta\ell_1 + (-1)\Delta\ell_2 \cdots\cdots (c)$$

若將上式中之「Δ」改為「d」，即為類同於公式（9）之微分式。再依誤差傳播公式改寫成中誤差的形式，

$$\sigma_d{}^2 = (+1)^2 \sigma_{\ell_1}{}^2 + (-1)^2 \sigma_{\ell_2}{}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

ℓ_1 與 ℓ_2為同一人所測，這兩個觀測值的中誤差理應相等，

令 $\sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_2} = \sigma_\ell \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (e)$

將（*e*）代入（*d*），得到較差之中誤差σ_d，它是單次觀測值 ℓ 的中誤差 σ_ℓ 的$\sqrt{2}$倍，即

$$\sigma_d = \sqrt{2} \cdot \sigma_\ell \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

應用公式(6)，可得較差之容許誤差 U_d為

$$U_d = 2\sigma_d = 2\sqrt{2}\cdot\sigma_\ell = \sqrt{2}\cdot(2\sigma_\ell) \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

較差 $d \le U_d$，只能說 ℓ_1、ℓ_2 初步合格，若 $d > U_d$，表示 ℓ_1、ℓ_2 不合格，還要再測，直到合格為止。較差合格了，才能取兩個合格觀測值之平均值為該項觀測工作之觀測值，並繼續後面的各項計算。

※較差使用字母「d」，微分符號也是「d」，請不要搞混。

3.平均值的中誤差 σ_x

設 ℓ_1、ℓ_2 $\cdots\ell_n$ 為重複觀測 n 次之觀測值，平均值 x，也就是最或是值 x，

$$x = [\ell_1+\ell_2 \cdots+\ell_n] / n \cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

比照較差及其中誤差之推算過程，可得

$$\Delta x = (1/n)\Delta\ell_1+(1/n)\Delta\ell_2+\cdots+(1/n)\Delta\ell_n \quad\cdots\cdots(b)$$

再引用誤差傳播公式

$$\sigma_x^2 = (1/n)^2\sigma_{\ell_1}^2+(1/n)^2\sigma_{\ell_2}^2+\cdots+(1/n)^2\sigma_{\ell n}^2$$

令 $\sigma_{\ell_1}=\sigma_{\ell_2}=\cdots=\sigma_{\ell n}=\sigma_\ell$

代入上式， 得 $\sigma_x^2=\sigma_\ell^2(1/n)$

$$\sigma_x = \sigma_\ell / \sqrt{n} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

a. 增大 n 之邊際效用

由上式可知，重複觀測次數愈多，n 愈大，σ_x 相對於 σ_ℓ 愈小，可是考慮邊際效用，n 不宜太大，通常取 $2 \le n \le 4$，其理可從表 2-4 看出來，特殊狀況重複觀測到 16 次，例如早年一等三角測量，測量水平角時，以方向組法觀測 16 測回，n = 16，其目的為了儘可能消除大氣不規則之影響。

表 2-4 增大 n 使 σ_x 減小之效果遞減

n	$\sigma_x=\sigma_\ell \div\sqrt{n}$	$(\sigma_x)_{n-1} - (\sigma_x)_n$
1	1.000 σ_ℓ	/
2	0.707 σ_ℓ	0.293 σ_ℓ
3	0.577 σ_ℓ	0.130 σ_ℓ
4	0.500 σ_ℓ	0.077 σ_ℓ
5	0.447 σ_ℓ	0.053 σ_ℓ
…	…	…
15	0.258 σ_ℓ	0.009 σ_ℓ
16	0.250 σ_ℓ	0.008 σ_ℓ

b.降低單項誤差之邊際效用

威特 T2 讀數試驗，讀數 120 次，平均值 x= 19.1” = 19”，單次讀數之中誤差 σ = ±1.2”，如表 2-1 及表 2-2。若依本小節公式(13)，則平均值中誤差

$$\sigma_x \approx \pm 1.2'' \div (120)^{1/2} = \pm 0.11''。$$

在實際測角工作中，水平角的誤差來源包括儀器對心誤差、覘標對心誤差、瞄準誤差、讀數誤差等，只是一昧追求降低讀數誤差，不能降低整體之角度誤差。必須通盤考慮，甚至使用更精密的儀器，才能降低角度誤差。

c.提高最或是值精度的方法

某位教師，使用學生水準測量實習成果，AB 距離 0.30km，共約 80 個高程差，刪除掉差異太大的，留下約 50 個，最大最小相差 10mm，全部取平均得 x，

$v = x - \ell$，$\sigma = \{[v^2] \div 49\}^{1/2}$，$\sigma_x = \sigma \div (50)^{1/2}$，算得$\sigma_x \approx \pm 0.3$mm，幾可媲美精密水準測量的精度，是否合理?

如果增加合格高程差總數到 200 次，則$\sigma_x' = \pm 0.3\text{mm} \cdot (50 \div 200)^{1/2} = \pm 0.15$mm，若只依靠增大 n 使$\sigma_x$減小之方式可行，則不必發明精密儀器，也不必研究精密優良的方法了。

所以欲提高精度，不能只顧著增加 n，還要改良儀器精度，測量方法，甚至注意測量環境，才能真正的提高精度。

4.多邊形內角閉合差之中誤差及其容許誤差

三角形內角閉合差 w 為

$$w = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$
$$w+\Delta w = (\alpha+\Delta\alpha) + (\beta+\Delta\beta) + (\gamma+\Delta\gamma) - 180^\circ$$
$$\Delta w = \Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma$$

依誤差傳播定律得

$$\sigma_w = (\sigma_\alpha^2+\sigma_\beta^2+\sigma_\gamma^2)^{1/2}$$

三個內角α、β、γ之中誤差相同，均為σ_θ，三角形內角閉合差之中誤差為

$$\sigma_w = \sqrt{3} \cdot \sigma_\theta \quad \cdots\cdots (14)$$

三角形閉合差之容許誤差為

$$U_w = 2\sigma_w = \sqrt{3} \cdot (2\sigma_\theta) \quad \cdots\cdots (15)$$

比照上式，擁有 m 個邊之多邊形，其內角閉合差之容許誤差為

$$U_w = \sqrt{m} \cdot (2\sigma_\theta) \quad \cdots\cdots 16)$$

（前面公式（14）的$\sqrt{3}$在此處換成$\sqrt{m}$）

導線測量規範可看到類同公式（16）之規定。

5.倍數之誤差傳播

視距測量當視線水平時，讀得視距間隔 ℓ，已知視距乘常數 K=100，加常數 C=0，則水平距 S 為

$$S = 100 \cdot \ell \quad \cdots\cdots (17)$$
$$S+\Delta S = 100 \cdot (\ell+\Delta\ell)$$

上述兩式相減

$$\Delta S = 100 \cdot \Delta \ell \quad \cdots\cdots (18)$$

$$\sigma_s^2 = 100^2 \sigma_\ell^2$$

$$\therefore \sigma_s = 100\sigma_\ell \quad \cdots\cdots (19)$$

上式中的「100」就是放大的倍數，如果視距間隔讀數誤差為 ±1 mm，就會導致水平距誤差為 ±100 mm＝ ±0.1 m。所以放大倍數之誤差傳播會將誤差擴大。由於視距測量可以節省測量距離的勞力，其誤差在製圖要求容許範圍內，所以早年地形測量製圖工程外業工作，經常採用視距測量，目前已被全站儀取代。

6.矩形面積之中誤差

如圖 2-4，矩形長 x，寬 y，面積 A，

$$A = x \cdot y$$

$$A+\Delta A = (x+\Delta x)(y+\Delta y)$$

$$= xy + \Delta y \cdot x + \Delta x \cdot y + \Delta x \cdot \Delta y$$

$$\approx xy + \Delta y \cdot x + \Delta x \cdot y$$

（式中 $\Delta x \cdot \Delta y$ 之值甚小，可省略不計）

$$\Delta_A = y \cdot \Delta x + x \cdot \Delta y \quad \cdots\cdots (20)$$

$$\sigma_A^2 = y^2 \cdot \sigma_x^2 + x^2 \cdot \sigma_y^2$$

$$\sigma_A = \{(y \cdot \sigma_x)^2 + (x \cdot \sigma_y)^2\}^{1/2} \quad \cdots\cdots (21)$$

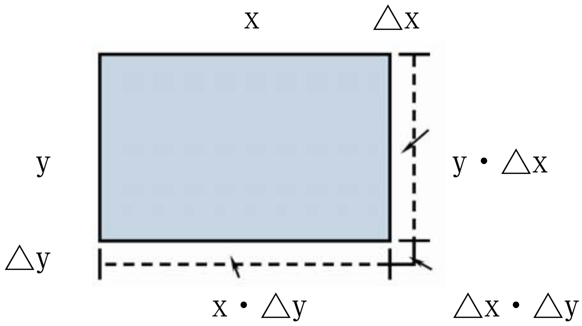


圖 2-4 矩形面積及其誤差

[例 1]矩形長寬各為

$x = 100.00\text{m}$， $\sigma_x = \pm 0.01\text{m}$

$y = 16.00\text{m}$， $\sigma_y = \pm 0.01\text{m}$

求矩形面積 A 及面積中誤差 σ_A

[解]　$A = x \cdot y = 1600\ \text{m}^2$

長邊 x 的誤差 σ_x 導致的面積誤差分量

$y \cdot \sigma_x = \pm 0.16\ \text{m}^2$

短邊 y 的誤差 σ_y 導致的面積誤差分量

$x \cdot \sigma_y = \pm 1.00\ \text{m}^2$

面積誤差

$$\sigma_A = \{(1m^2)^2 + (0.16m^2)^2\}^{1/2} = \pm 1.08\ m^2$$

由本例可知，狹長形土地求面積時，短邊之誤差對整個面積之影響較長邊者為大。所以測量狹長土地面積時，降低短邊之誤差比較有利。

[例 2]承上例，若 $x = y = 40.00$ m，$\sigma_x = \sigma_y = \pm 0.01$ m，求 A 及σ_A。

[解]　$A = x \cdot y = 1600\ m^2$

$$\sigma_A = \{(0.40\ m^2)^2 + (0.40\ m^2)^2\}^{1/2} = \pm 0.556\ m^2$$

[例 3]正方形，邊長 x 及其中誤差各為 $x = 40.00$ m，$\sigma_x = \pm 0.01$ m，試求其面積及其中誤差。

[解]　$A = x^2 = 1600\ m^2$

$$\because \quad A + \Delta A = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$\approx x^2 + 2x \cdot \Delta x$$

$$\therefore \quad \Delta A = 2x \cdot \Delta x$$

$$\sigma_A = 2x \cdot \sigma_x = \pm 0.80\ m^2$$

※比較例 2 與例 3，矩形長寬相等 $x = y$，仍應按照矩形面積的誤差傳播公式計算，不可使用正方形的，其原因請參閱「廣義的誤差傳播」，不再贅述。

7.省略小誤差來源之標準

測量水平角之誤差來源，計有對心誤差、瞄準誤差、讀數誤差等，當目標距離測站達 1000 m 以上時，覘標對心誤差±1 mm 導致水平角之誤差，其值為 206265"・1 mm ÷ 1000 m = ± 0.2"，甚小，可忽略不計。假設只考慮讀數與瞄準之誤差，令

$$\sigma_\theta^2 = \sigma_R^2 + \sigma_T^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

上式θ代表方向，R 代表讀數，T 代表瞄準，

當$\sigma_R = \sigma_T = \pm 3.0''$，$\sigma_\theta = \pm 3.0'' \cdot \sqrt{2} = \pm 4.2''$，

當$\sigma_R = \pm 3.0''$，$\sigma_T = \pm 1.0'' = 1/3\sigma_R$，$\sigma_\theta = \pm 3.16'' \approx \sigma_R$，

令$\sigma_T = c \cdot \sigma_R$，$c < 1$，代入（$a$）式，

$$\sigma_\theta = (\sqrt{(1+c^2)})\ \sigma_R \le 1.0540\sigma_R \cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

亦即　$\sqrt{(1+c^2)} \le 1.054 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (22)$

$c \le 1/3$

如果只有兩項誤差來源，其中較小的誤差為較大誤差的 1/3 倍以內時，小誤差對整體之影響僅為 0.054 / 1.054，大約 5.1 %，亦即小誤差可以略而不計。而 1/3 就是可以省略小誤差的倍數標準。

※特別說明：如果要求較嚴，可以取 1/5。

忽略小誤差的好處為可以減化計算工作，主要好處在於可以多花一些精力應付較大的誤差來源，使得整體誤差降低。

8.誤差傳播之應用

上一小節已算得 c = 1/3 為忽略小誤差之標準，此為誤差傳播之應用。

許多測量工作，在測量之前就可以依照所要用到之觀測值與計算公式，依據經驗預估觀測值之中誤差，推算最後待求成果之中誤差。如果不能達到要求，則要考慮其他方法或者使用他種儀器，重新推算，使之滿足需求，然後才進行測量工作。

例如水庫蓄水區測量泥沙沈積工作，通常每年測量一次，如果每年在水庫區只測一點水深，以之計算泥沙沈積，其代表性或精度嚴重不足。必須在庫區適當位置測量適當數量的測深點求泥沙沈積，其代表性或精度才有保障。此一工作也要利用誤差傳播推算，不再贅述。

9.系統誤差之誤差傳播

本節到此所說之誤差傳播，都是針對偶然誤差之傳播。偶然誤差之特性，它有正有負…，所以兩種以上的誤差合在一起計算時，先求平方和再開平方根，不是直接相加，也不是取絕對值的和。平方和開平方根，多多少少隱含了+－ 誤差部份相消的結果。

精密鋼卷尺出廠時都要附帶一份檢定表，註明在標準溫度與拉力時，每5公尺之實長。假若某尺刻註50.000 m處之實長為50.0072 m，尺長檢定之中誤差為 ±0.0006 m，若以該尺量距10個尺段，每次都用銅片劃線標示「尺段50.0000」，則實長為50×10 +(0.0072×10) = 500.072 m。而其中誤差

$\sigma_S=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ ，σ_1為讀數劃線之誤差，彈簧秤拉力誤差，溫度計誤差…等偶然誤差之綜合誤差，σ_2為該尺檢定所導致的中誤差。

$$\sigma_2 \neq \sqrt{10}\cdot(\pm 0.0006\text{m}) = \pm 0.0019\text{m},$$

$$\sigma_2 = 10\cdot(\pm 0.0006\text{m}) = \pm 0.006\text{m}。$$

因為使用該尺銜接量距 10 段，此時 10 段承受之檢定中誤差為同正或同負，所以尺長檢定誤差之傳播為倍數型態，不是平方和開根號之型態。

假設$\sigma_1 = \pm 0.003$ m ，已算得$\sigma_2 = \pm 0.006$ m。

則$\sigma_s = \pm(3^2+6^2)^{1/2}$ mm = ± 0.0067 mm

※特別說明：若以該尺重複測量該距離四次取平均，

則$\sigma_s \neq \pm(3^2+6^2)^{1/2}$ mm ÷ $(4^{1/2})$ = ± 0.0033 mm

$\sigma_s = \pm((3\div(4^{1/2}))^2+6^2)^{1/2}$ mm = ± 0.0062 mm

因為重複測量該距離n次，只有偶然誤差才會「$\div(n^{1/2})$」，尺長檢定所導致的中誤差 ± 0.006 m，在此為固定值不變。亦即重複測量該距離無窮多次，該距離的中誤差趨近於 ± 0.006 m，不會趨近於0。

10.權、單位權中誤差與先驗中誤差

學生考試成績有高低，同樣的，測量員之技術與儀器精度也有高低之分，環境也對測量值有一定的影響，所以每一個觀測值或每一組觀測值的精度相對於其他的或其他組的亦有高低。

a.權

學生的學期成績依照各科目每週上課的鐘點數及其實得分數評定。例如甲生國文 80 分，英文 70 分，自然 84 分，社會 72 分，這四科每週鐘點數各為 5、4、4、3，則該生之學期成績為：

$x_1 = (80 \cdot 5+70 \cdot 4+84 \cdot 4+72 \cdot 3) / (5+4+4+3) = 77.0$

如果四科直接取平均，則 $x_1' = 76.5$。

乙生得分依次為 72、70、84、80，學期成績為 $x_2 = 76.0$，四科直接平均為 $x_2' = 76.5$。

甲乙二生四科直接平均之成績均為 76.5 分，區分不出高低，可是依照各科目每週上課鐘點數評定，則甲生成績較高。因為國文比重為 5，社會為 3，比重較大的科目分數較高，學期成績就比較高。

同樣，測量值的精度較高，平差計算時也應佔有較高的「比重」，平差法將它稱為「權」。比重是相對的數值，權亦是相對的數值，權愈大，精度愈高。在偶然誤差及其特性一節，曾提到中誤差愈小，精度愈高，所以權可以依據中誤差來評定。

茲省略理論推導，直接列出權與中誤差之關係為：

權與中誤差之平方成反比，以數學式子表示為：

$p_1 : p_2 = \sigma_2^2 : \sigma_1^2$……………………………………………（23）或

$p_i = k \div \sigma_i^2$………………………………………………………（23'）

例如 ℓ_1 與 ℓ_2 之中誤差各為 $\sigma_1 = \pm 3$ mm、$\sigma_2 = \pm 6$ mm，則由上述公式可得：

$p_1 : p_2 = 6^2 : 3^2 = 4 : 1$

或者　令 $k = 36\ mm^2$，

$p_1 = 36\ mm^2 \div (3mm)^2 = 4$

$p_2 = 36\ mm^2 \div (6mm)^2 = 1$

$p_1 : p_2 = 4 : 1$

※若令 $k = 1$，仍可得到 $p_1 : p_2 = 4 : 1$。

b.單位權中誤差與後驗中誤差

由一組等精度之觀測值 $\ell_1 \sim \ell_n$，先求 $x = [\ell] \div n$，$v_i = x - \ell_i$，再依照公式（5）求 σ。

若 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$，則 $\ell_1 \sim \ell_n$ 之後驗中誤差均為

$\sigma_{\ell_1} = \sigma_{\ell_2} = \cdots = \sigma_{\ell n} = \sigma = \{[v^2] \div (n-1)\}^{1/2}$……（24）

若 $\ell_1 \sim \ell_n$ 之精度不等，亦即不等權，權各為 $p_1 \sim p_n$，則 $x = [p\ell] \div [p]$，$v_i = x - \ell_i$，依下式求 σ

$\sigma = \{[pv^2] \div (n-1)\}^{1/2}$ ……………………………………（5'）

依上述公式計算之 σ，即為單位權中誤差。

$\ell_1 \sim \ell_n$ 之後驗中誤差各為

$$\sigma_{\ell i} = \sigma \div \sqrt{p_i} = \{[pv^2] \div (n-1)\}^{1/2} \div \sqrt{p_i} \cdots\cdots (24')$$

後驗中誤差為平差後所算得者，與它相對之名稱為先驗中誤差。

c.觀測值的先驗中誤差與權

觀測值的權，主要依據中誤差而來，如何推算觀測值的中誤差? 觀測值（平差前之觀測值），可依儀器之精度、測量員之技術、測量之環境…等，再依據誤差傳播理論，必要時可參考經驗值，預估或計算測量值的中誤差，它就是先驗中誤差。通常使用先驗中誤差推算各觀測值的權。

此外，亦可按照卷尺量距長度之倒數，水準測量路線長度之倒數給權，也可依照重複量距或測角次數給權，甚至使用廠商所給之中誤差，依據公式（23’）求權。

例如電子測距儀之測距中誤差σ_s

$$\sigma_s = \pm (2\text{mm} + 3\text{ppm} \cdot S) \cdots\cdots (25)$$

此公式考慮了儀器與稜鏡之對心誤差，氣溫氣壓變化之誤差，電子測距儀頻率振盪器之誤差，稜鏡加常數之誤差等。若 $S \approx 300$m，則$\sigma_s \approx \pm 2.9$mm 。

※ 1 ppm ＝ 1 / 1,000,000 。

近來出廠之電子測距儀，測距穩定程度甚佳。距離約數百公尺，在同一站重複測距 10 次，依據$\sigma = \{[v^2] \div (10-1)\}^{1/2}$，求單次觀測之中誤差，$\sigma$大約在 ± 1mm 之等級，若再除以$\sqrt{10}$，則為 ± 0.3mm，其值偏小，不合理。故知應採用廠商提供之公式計算σ_s 比較合理。

先驗中誤差與平差後所得之後驗中誤差，二者通常不會相等，如何解釋與處理超過高職學生程度，不再贅述。

（三 ）測量平差概論

只要測量就伴隨著誤差，誤差，應該如何處理? 首先儘可能避免或刪除錯誤，改正系統誤差，至於偶然誤差則以平差法處理。

所謂平差法就是處理誤差的方法，「平差」含有平均誤差之意。而平差的基本原理，就是使觀測值誤差平方和為最小（最小自乘），即：

$$[\varepsilon^2] = \text{最小} \cdots\cdots (26)$$

若不知道真誤差，則使用改正數 v 或誤差Δ，即：

$$[v^2] = [\Delta^2] = \text{最小} \cdots\cdots (26')$$

若各觀測值之權不等，則廣義最小自乘為：

$$[p\varepsilon^2] = \text{最小} \cdots\cdots (27) \text{或}$$

$$[pv^2] = [p\Delta^2] = \text{最小} \cdots\cdots (27')$$

一個觀測量剛好求一個未知數，沒有所謂之平差。觀測量的數目 n 大於未知

數的數目 u，就會產生不同的解答，也就是發生矛盾，依最小自乘之原理，處理這些矛盾，得到統一的解答，就是平差的目的。

平差的「方法」，又可稱為「模式」，共有：直接平差法、條件平差法、間接觀測平差法及簡易平差法等。

1.直接觀測平差

直接觀測平差，通常處理只有一個未知數之測量問題，重複觀測 n 次，若每個觀測值之精度相等，也就是等權，它們的平均值為最或是值，可滿足誤差平方和為最小的要求。若各觀測值不等權，則依加權取平均之方式求解。

[例 4]某一段距離，以卷尺重複測量三次，經過系統誤差改正，得 ℓ_1= 100.254m，ℓ_2 = 100.248m， ℓ_3 = 100.257m，求距離 x 及距離之中誤差 σ_x。

[解] $x = (\ell_1+\ell_2+\ell_3) \div 3 = 100.253$ m

$v_1 = x - \ell_1 = -1$ mm ，同法， $v_2 = 5$ mm， $v_3 = -4$ mm

$[v^2] = 1^2 + 5^2 + 4^2 = 42\ \text{mm}^2$

多餘觀測之數目= $n - u = 3 - 1 = 2$

單位權中誤差

$\sigma = \{[v^2] \div (n-u)\}^{1/2} = \pm 4.6$ mm ≈ ± 5 mm

$\sigma_x = \sigma \div \sqrt{n} = \pm 2.6$ mm ≈ ± 3 mm

[驗算] $[v] = -1+5+(-4)=0$

$\ell_{1a} = \ell_1 + v_1 = 100.254\ \text{m} + (-1)\ \text{mm} = 100.253$ m

$\ell_{2a} = \ell_2 + v_2 = 100.248\ \text{m} + 5\ \text{mm} = 100.253$ m

$\ell_{3a} = \ell_3 + v_3 = 100.257\ \text{m} + (-4)\ \text{mm} = 100.253$ m

平差後，$\ell_{1a} = \ell_{2a} = \ell_{3a} = x$，得到統一的結果。

$\ell_{1a} \sim \ell_{3a}$ ，x 之中誤差均為 $\sigma_x \approx \pm 3$ mm

$\ell_1 \sim \ell_3$ 之中誤差均為 $\sigma \approx \pm 5$ mm

[例 5] 承上例，如果 $\ell_1 \sim \ell_3$ 不等權，$p_1 = 2$，$p_2 = 3$，$p_3 = 4$，試求 x 及 σ_x。

[解] $x = [p\ell] \div [p]$

$= 100.250\ \text{m} + \{[2\cdot4+3\cdot(-2)+4\cdot7]\ \text{mm}\} \div (2+3+4)$

$= 100.2533$ m（多取一位）

$v_1 = x - \ell_1 = -0.7$ mm， $v_2 = 5.3$ mm， $v_3 = -3.7$ mm

$[pv^2] = 2\cdot0.7^2 + 3\cdot5.3^2 + 4\cdot3.7^2 = 140.01\ \text{mm}^2$

單位權中誤差

$\sigma = \{[pv^2] \div (n-u)\}^{1/2} = \pm 8.4$ mm

x 的權 p_x 為

$p_x = [p] = 2+3+4 = 9$

距離 x 之中誤差為

$\sigma_x = \sigma \div [p]^{1/2} = \pm 2.8$ mm ≈ ± 3 mm

[驗算] $[pv] = 2\cdot(-0.7) + 3\cdot5.3 + 4\cdot(-3.7)$

$= -0.3\ \mathrm{mm} \approx 0$ （四捨五入所致微小數）

$\ell_{1a} = \ell_1 + v_1 = 100.254\ \mathrm{m} + (-0.7)\ \mathrm{mm} = 100.2533\ \mathrm{m}$

$\ell_{2a} = \ell_2 + v_2 = 100.248\ \mathrm{m} + 5.3\ \mathrm{mm} = 100.2533\ \mathrm{m}$

$\ell_{3a} = \ell_3 + v_3 = 100.257\ \mathrm{m} + (-3.7)\ \mathrm{mm} = 100.2533\ \mathrm{m}$

$\ell_{1a} = \ell_{2a} = \ell_{3a} = x$ 之中誤差均為 $\sigma_x \approx \pm 3\mathrm{mm}$，$\ell_1$～$\ell_3$ 之中誤差各為 $\sigma \div \sqrt{p_i}$，p_i 各為 2、3、4，分別算得 σ_{ℓ_1}～σ_{ℓ_3} 為 ± 5.9 mm、±4.8 mm、±4.2 mm。

※特別說明

本例取 x 值為 100.2533 m，多取一位，只是為了後續計算之驗核〔pv〕= 0，不論 x、ℓ_{ia} 、σ 、σ_x 及 $\sigma_{\ell ia}$，均取到 mm 位已足，取到 0.1 mm 的目的僅在於比較其差異而已。

2.條件觀測平差

所謂條件觀測平差，就是將各個相關的觀測量 ℓ_b 組成條件方程式並平差。其模式為

$$F(L_a) = F(L_b+V) = 0 \quad\cdots\cdots(28)$$

上式表示平差後的觀測值之間應滿足一定的幾何或物理條件。將之微分亦即線性化，得

$$BV + W = 0 \quad\cdots\cdots(29)$$

詳細平差公式請參閱測量平差法。僅舉簡單例子說明。

[例 6]有一個三角形 ABC，測得三個內角 $\alpha = 30^\circ 48' 25''$，$\beta = 55^\circ 56' 32''$，$\gamma = 93^\circ 15' 15''$，它們以相同的儀器與方法測得，其精度相等。求 A、B、C 三角。

[解] $w = (\alpha+\beta+\gamma) - 180^\circ = 12''$

$v = -w \div 3 = -4'' = v_\alpha = v_\beta = v_\gamma$

$\therefore\ A = \alpha + v = 30^\circ 48' 21''$

$B = \beta + v = 55^\circ 56' 28''$

$C = \gamma + v = 93^\circ 15' 11''$

〔v^2〕=48 秒^2，條件數目 r =1

單位權中誤差

$\sigma = \{〔v^2〕\div r\}^{1/2} \approx \pm 7''$

α 、β 、γ 之中誤差均為 $\sigma \approx \pm 7''$

A、B、C 之中誤差省略，見後述間接觀測平差計算例。

※本例不可依 α 、β 、γ 之大小分配閉合差。

※採用條件平差時，觀測量愈多，條件式亦隨之增多，所有使用到的條件式必須獨立。

3.間接觀測平差

※本小節之內容比較艱難，超過高職一年級學生程度，僅供參考。

間接觀測平差，就是將每一個觀測量 ℓ_b，以未知參數 x 的函數表示，稱為觀測方程式。

$$\left.\begin{aligned}\ell_{1a} &= \ell_{1b} + v_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_u)\\ \ell_{2a} &= \ell_{2b} + v_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_u)\\ &\vdots\\ \ell_{na} &= \ell_{nb} + v_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_u)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(30)$$

若 n ＜ u，則無法求解全部的未知參數。

若 n ＝ u，則恰好求解，且 $v_1 = v_2 = \cdots v_n = 0$。

若 n ＞ u，才有平差問題。

上式以矩陣形式表示為

$L_a = L_b + V = F(X_a)$ ……（30'）

將上式微分，也就是線性化，

$V = AX + W$ ……（31）

※詳細平差公式省略。

[例 7]承前面的例子，α、β、γ 以 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 表示，並以間接觀測法平差。

[解] 令 $x_{10} = 30°48'20''$，$x_{20} = 55°56'30''$

$\ell_1 + v_1 = x_{10} + \Delta x_1$

$\ell_2 + v_2 = x_{20} + \Delta x_2$

$\ell_3 + v_3 = 180° - (x_{10} + \Delta x_1 + x_{20} + \Delta x_2)$

$v_1 = \Delta x_1 + (-5'')$

$v_2 = \Delta x_2 + (-2'')$

$v_3 = -\Delta x_1 - \Delta x_2 + (-5'')$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\quad W = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

P = diagonal〔1　1　1〕

$$N = A^T P A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\qquad N^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$U = A^T P W = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$NX + U = 0$

$$X = -N^{-1}U = -\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1'' \\ -2'' \end{bmatrix}$$

$x_{1a} = x_{10} + \Delta x_1 = 30° 48' 21''$

$x_{2a} = x_{20} + \Delta x_2 = 55° 56' 28''$

$$V = AX + W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4'' \\ -4'' \\ -4'' \end{bmatrix}$$

$$\sigma^2 = V^T PV/(n-u) = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}/(3-2) = 48 \text{ 秒}^2$$

單位權中誤差σ為

$\sigma = (\sigma^2)^{1/2} \approx \pm 7'' = \sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma$

取 N^{-1} 對角線之元素 2/3 計算：

$\sigma_{1a} = \sigma_A = \sigma \cdot \sqrt{(2/3)} = \pm 5.7'' \approx \pm 6''$

$\sigma_{2a} = \sigma_B = \sigma \cdot \sqrt{(2/3)} \approx \pm 6''$

既然α、β、γ三角等權，現已算得$\sigma_A = \sigma_B$

$\therefore \sigma_C = \sigma_A = \sigma_B \approx \pm 6''$

[另解]本題亦可使用虛擬觀測量求解

令 $A_1 = \alpha = 30°48'25''$（直接觀測量）

$A_2 = 180° - (\beta+\gamma) = 30° 48' 13''$（虛擬觀測量）

$p_{A1} = 1$， $p_{A2} = 1/2$

$A = (p_{A1} \cdot A_1 + p_{A2} \cdot A_2) / (p_{A1} + p_{A2}) = 30° 48' 21''$

有關中誤差之計算省略。同法可算得B，再用 180°－(A+B）得 C。

※ α、β、γ為等權觀測值，所以可令$\sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = \sigma_\gamma^2 = \sigma^2$， 故 $\sigma_{A1}^2 = \sigma^2$， $A_2 = 180° - (\beta+\gamma)$，依誤差傳播定律，$\sigma_{A2}^2 = \sigma_\beta^2 + \sigma_\gamma^2 = 2\sigma^2$，令 $p_{A1} = 1$，則 $p_{A2} = 1/2$ 。

※ 特別說明：本例亦可改用 C 點座標（x，y）為未知數，亦即令 A、 B、C 三點之座標各為（N_A，E_A）、（N_B，E_B）、（x，y），平差結果相同。若再觀測 $\ell_4 = AC$ 、$\ell_5 = BC$，連同三個水平角，觀測值數目 $n = 5$，未知數的數目 $u = 2$，多餘觀測的數目 $r = n - u = 3$ ，這 5 個觀測量可以構成之條件數目大於 3，只有 3 個獨立條件，請自行參閱坐標幾何或解析幾何有關於邊長及角度之數學公式，甚至參閱誤差橢圓，它與點位誤差有關。

4.簡易平差法

有些測量中之平差工作，不必採用嚴密平差法，可以採用簡易平差法。簡易

平差之中有一種分階段平差的方法，例如導線測量，先平差水平角，再平差縱橫坐標，請參閱本書下學期導線測量實習單元。

5.其他方法

其他平差方法還有虛擬觀測平差，聯合平差法，三角三邊網平差常用到的自由網平差…等，不再贅述。

6.間接觀測平差與條件觀測平差之比較

（1）條件平差是將有關係之觀測量 ℓ_{bi} 構成條件式，經過處理後先求出改正數 v_i，再算得 $\ell_{ai} = \ell_{bi} + v_i$，如有需要再用 ℓ_{ai} 求其他量，例如點位坐標（x, y）…等。

（2）間接觀測平差，則將每一觀測量 ℓ_{bi}，依 $\ell_{bi} + v_i = f(x_1, x_2, \cdots x_u)$ 構成觀測方程式，經處理後，先求出未知數 x_j，$j = 1\sim u$，再求 v_i，$i = 1\sim n$ …等。

（3）早年沒有電腦的時代，複雜的三角網之平差，多採用條件觀測平差。電腦時代，已改用間接觀測平差。

（四）注意事項

1.較差 $d=\ell_1 - \ell_2$，$\sigma_d^2 \neq \sigma_{\ell_1}^2 - \sigma_{\ell_2}^2 = \sigma_\ell^2 - \sigma_\ell^2 = 0$，因為沒有「誤差傳播變成零」這麼好的事。 $\Delta d = \Delta\ell_1 - \Delta\ell_2$，「−」號是「−1」，$(-1)^2$仍為「+」，所以$\sigma_d^2 = 2\sigma_\ell^2$。

2.重複測量兩次，較差 $d=\ell_1 - \ell_2$，d 值可能為零，但是不能說這兩個觀測值 ℓ_1、ℓ_2 的中誤差為零，也不能說 $x = (\ell_1 + \ell_2) \div 2$ 的中誤差為零。請參閱偶然誤差的特性。

（五）討論

1.方向組法測量水平角，每一方向觀測三測回。規定甲：任一測回與三測回平均值的差不大於5”取平均。規定乙：三測回最大最小的差不大於10”取平均。何者要求比較合理? 試依下述資料分析比較。

*a.*三測回之秒數各為 ℓ_1 =11”， ℓ_2 = 6”， ℓ_3 = 1”。

*b.*三測回之秒數各為 ℓ_1*=11”， ℓ_2*= 9”， ℓ_3*= 1”。

2.如果只用重複測量兩次的資料 ℓ_1、ℓ_2，計算 x、σ、σ_x 是否合理。

3.普通導線測量，邊長 S 通常重複測量2次，S_1、S_2較差 d 合格，取S_1與S_2平均為所測得之邊長。若較差為零，可否宣稱所測邊長之相對誤差「$\sigma_s \div S$」為零？

（六）參考文獻

1.測量平差法，陳永齡、夏堅白、王之卓合著，上海商務印書館，1947。

2.測量平差法授課講義，周龍章編著，成大測量系。
3.最小自乘法平差，尹鍾奇編著，創海出版社。
4.測量學，同濟大學測量系與清華大學測量教研組合編，測繪出版社，1995.10，二刷。
5.測繪出版社，測量平差法及測量學相關教材。
6.武漢測繪大學，測量平差法及測量學相關教材。
7.數值測量標準作業程序之研究，羅慶昌、白巨川、袁克中、蕭志書、任顯豐，台灣省地政處委託研究案，民國83～85年。
8.Elementary Surveying (An Introduction to Geomatics)，2002，10版，Paul R. Wolf & Charles D. Ghilani。

（七）致歉

本人退休時將一些測量書籍贈送同事,參考文獻中所提到的部分書籍不便察明其作者姓名，敬請相關作者見諒。